1. உறவுகளும் சார்புகளும்

பயிற்சி 1.1

நினைவில் கொள்ள...

வரையறை:

- ✓ ஒரு கணமானது, நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட, பொருள்களின் தொகுப்பு ஆகும்.
- ✓ A மற்றும் B என்பன இரண்டு வெற்றில்லா கணங்கள் எனில், இவற்றின் வரிசைச் சோடிகளின் கணமானது (a, b) $a \in A, b \in B$ என இருக்கும். இதை A மற்றும் B யின் **கார்டீசியன் பெருக்கல்** என்கிறோம். எனவே $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

குறிப்பு:

- ✓ $A \times B$ ஆனது, A மற்றும் B என்ற கணங்களுக்கிடையேயான அனைத்து வரிசைச் சோடிகளின் கணம் எனில், அதன் முதல் உறுப்பு A யின் உறுப்பாகவும், இரண்டாவது உறுப்பு B யின் உறுப்பாகவும் இருக்கும்.
- ✓ $B \times A$ ஆனது, A மற்றும் B என்ற கணங்களுக்கிடையேயான அனைத்து வரிசைச் சோடிகளின் கணம் எனில், முதல் உறுப்பு B யின் உறுப்பாகவும் இரண்டாவது உறுப்பு A யின் உறுப்பாகவும் இருக்கும்.
- ✓ பொதுவாக $(a, b) \neq (b, a)$ குறிப்பாக $a = b$ எனில் $(a, b) = (b, a)$.
- ✓ கார்டீசியன் பெருக்கலைக் குறுக்கு பெருக்கல் (Cross product) எனவும் குறிப்பிடலாம்
- ✓ பொதுவாக $A \times B \neq B \times A$, ஆனால் $n(A \times B) = n(B \times A)$
- ✓ $A \times B = \emptyset$ எனில் $A = \emptyset$ அல்லது $B = \emptyset$
- ✓ $n(A) = p$ மற்றும் $n(B) = q$ எனில் $n(A \times B) = pq$
- ✓ கார்டீசியன் தளத்தில் உள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளின் கணத்தை (x, y) என்ற வரிசைச் சோடிகளின் கணமாக அறியலாம். இதில் x, y ஆகியவை மெய்யெண்கள். $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ என்ற கணத்தில் உள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளையும் நாம் கார்டீசியன் தளம் என அழைக்கிறோம்.
- ✓ **கார்டீசியன் பெருக்கலின் சேர்ப்பு மற்றும் வெட்டுகளின் மீதான பங்கீட்டு பண்புகள்:**
  (i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ (ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- ✓ $A \times B$ என்பது இரு பரிமாணத்தில் சதுரத்தின் புள்ளிகளைக் குறிக்கிறது. $A \times B \times C$ என்பது முப்பரிமாணத்தில் கனசதுரத்தின் புள்ளிகளை குறிக்கிறது.

பயிற்சி 1.2

நினைவில் கொள்ள...

வரையறை: A மற்றும் B என்பன இரண்டு வெற்றில்லா கணங்கள் என்க. A யிலிருந்து B க்கு உள்ள உறவு R ஆனது சில விதிமுறைகளை நிறைவு செய்து, $A \times B$ யின் உட்கணமாக இருக்கும். $x \in A$ விற்கும் $y \in B$ க்குமான உறவு R ன் வழியாக இருந்தால் xRy என எழுதலாம். xRy என இருந்தால் மட்டுமே $(x, y) \in R$.

உறவு R யின் **மதிப்பகம்** $= \{x \in A | xRy$, ஏதேனும் ஒரு $y \in B\}$

உறவு R ன் **துணை மதிப்பகம்** $= B$ ஆகும்

உறவு R ன் **வீச்சகம்** $= \{y \in B | xRy$, ஏதேனும் ஒரு $x \in A\}$

குறிப்பு:

- ✓ ஓர் உறவை, பட்டியல் முறையிலோ அல்லது கணக்கட்டமைப்பு முறையிலோ குறிக்கலாம்.
- ✓ உறவைக் காட்சிப்படுத்தி அறிய அம்புக்குறி படத்தை பயன்படுத்தலாம்.
- ✓ ஓர் உறவில் உறுப்புகள் இல்லை என்றால் அது **இன்மை உறவு** (Null relation) எனப்படும்.
- ✓ $n(A) = p, n(B) = q$ எனில், A மற்றும் B க்கு இடையே கிடைக்கும் மொத்த உறவுகளின் எண்ணிக்கையானது 2^{pq} ஆகும்.

பயிற்சி 1.3

நினைவில் கொள்ள...

வரையறை: X மற்றும் Y என்ற வெற்றில்லா கணங்களுக்கிடையேயான ஒரு உறவு f-ல் ஒவ்வொரு $x \in X$ க்கும் ஒரே ஒரு $y \in Y$ கிடைக்கிறது எனில் f ஐ நாம் "**சார்பு**" என்கிறோம்.

அதாவது, $f = \{(x, y)/$ஒவ்வொரு $x \in X$ க்கும், ஒரே ஒரு $y \in Y$இருக்கும்$\}$

ஒரு சார்பை, தொடர்புபடுத்துதல் அல்லது உருமாற்றம் செய்தல் என கருதலாம்.

குறிப்பு: $f: X \to Y$ ஆனது ஒரு சார்பு எனில்,

- ✓ கணம் Xஐ, சார்பு f ன் மதிப்பகம் எனவும் கணம் Y ஐ, அதன் துணை மதிப்பகம் எனவும் அழைக்கிறோம்.
- ✓ $f(a) = b$ ஆக இருந்ததால் சார்பு f ல் b ஆனது a யின் **நிழல் உரு** எனவும் மற்றும் a ஆனது b யின் **முன் உரு** எனவும் அழைக்கிறோம்.
- ✓ X யின் அனைத்து நிழல் உருக்களையும் கொண்ட கணத்தை f-யின் வீச்சகம் என்கிறோம்.
- ✓ $f: X \to Y$ ஆனது ஒரு சார்பு எனில்,

  i) மதிப்பகத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் நிழல் உரு இருக்கும்.

  ii) ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் ஒரே ஒரு நிழல் உருதான் இருக்கும்.
- ✓ முடிவுறு கணங்கள் A மற்றும் B யில் $n(A) = p,\ n(B) = q$ எனில், A மற்றும் B க்கு இடையேயான மொத்தச் சார்புகளின் எண்ணிக்கை q^p ஆகும்.
- ✓ சார்பின் மதிப்பகத்தை விளக்கும் போது,

(i) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ யில் $x = -1$ எனில் $f(-1)$ வரையறுக்க முடியாது. எனவே f ஆனது $x = -1$ ஐ தவிர அனைத்து மெய்யெண்களுக்கும் வரையறுக்கப்படுகின்றது. ஆகையால் f ன் மதிப்பகமானது $\mathbb{R} - \{-1\}$

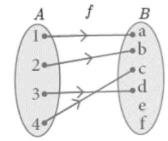
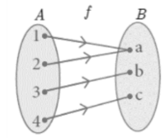
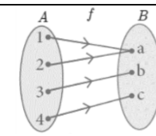
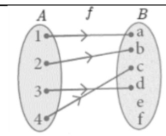
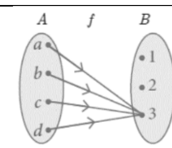
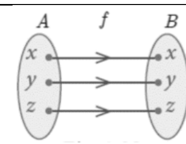
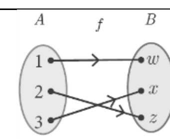
(ii) $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$ ல் $x = 2,3$ ஆக இருந்தால் $f(2)$ மற்றும் $f(3)$ ஐ வரையயறுக்க முடியாது. எனவே f ஐ $x = 2$ மற்றும் 3 தவிர அனைத்து மெய்யெண்களுக்கு வரையறுக்கலாம். ஆகையால் f யின் மதிப்பகம் $= \mathbb{R} - \{2,3\}$

பயிற்சி 1.4

நினைவில் கொள்ள...

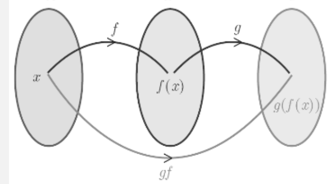
- ✓ சார்புகளை குறிக்கும் முறை

  (i) வரிசைச் சோடிகளின் கணம் (ii) அட்டவணை முறை (iii) அம்புக்குறி படம் (iv) வரைபடம்
- ✓ **குத்துக்கோட்டுச் சோதனை (Vertical line test):** வளைவரையை ஒவ்வொரு குத்துக்கோடும் அதிகபட்சம் ஒரு புள்ளியில் வெட்டினால் அவ்வளைவரை ஒரு சார்பினைக் குறிக்கும்.
- ✓ **கிடைமட்டக்கோட்டுச் சோதனை (Horizontal line test):** வளைவரை ஒன்றுக்கொன்றான சார்பைக் குறித்தால், வரையப்படும் கிடைமட்டக்கோடு வளைவரையை அதிகபட்சமாக ஒரு புள்ளியில் மட்டுமே வெட்டும்.
- ✓ ஒவ்வொரு சார்பையும், ஒரு வளைவரையாக (curve) வரைபடத்தில் குறிப்பிடலாம். ஆனால் வரைபடத்தில் வரையப்படும் அனைத்து வளைவரைகளும் சார்பாகாது.

வ.எண்	பெயர்	வரையறை	விளக்கம்
1	**ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு (ஒரு புறச் சார்பு)**	$f: A \to B$ என்பது சார்பு என்க. Aன் வெவ்வேறான உறுப்புகளை B ல் உள்ள வெவ்வேறு உறுப்புகளுடன் f ஆனது தொடர்புபடுத்துமானால், f என்பது **ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு** ஆகும்.	
2	**பலவற்றிற்கு ஒன்றான சார்பு**	சார்பு $f: A \to B$ ஐ **பலவற்றிற்கு ஒன்றான சார்பு** எனில், அச்சார்பில் A-ன் ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளுக்கு, B -ல் ஒரே நிழல் உரு இருக்கும்.	
3	**மேல் சார்பு (மேல்புறச் சார்பு)**	$f: A \to B$ என்ற ஒரு சார்பு, **மேல் சார்பு** எனில் f -ன் வீச்சகமானது, f -ன் துணை மதிப்பகத்திற்குச் சமமாக இருக்கும். $f(A) = B$	
4	**உட்சார்பு**	ஒரு சார்பு $f: A \to B$ ஆனது **உட்சார்பு** எனில், B -ல் குறைந்தபட்சம் ஓர் உறுப்பிற்காவது, A -ல் முன் உரு இருக்காது.	
5	**மாறிலிச் சார்பு**	சார்பு $f: A \to B$ ஆனது **மாறிலிச் சார்பு** எனில், f -ன் வீச்சகமானது ஒரே ஓர் உறுப்பைக் கொண்டதாகும். அதாவது, $f(x) = c$, அனைத்து $x \in A$ ஏதேனும் ஒரு நிலையான $c \in B$.	
6	**சமனிச் சார்பு**	A ஒரு வெற்றிலா கணம் என்க. சார்பு $f: A \to A$ ஆனது $f(x) = x$ அனைத்து $x \in A$, என வரையறுக்கப்பட்டால், அந்த சார்பு A -யின் **சமனிச் சார்பு** எனப்படும். இதை I_A எனக் குறிக்கலாம்.	
7	**இருபுறச் சார்பு**	$f: A \to B$ என்ற சார்பு, ஒன்றுக்கு ஒன்றாகவும் மற்றும் மேல்சார்பாகவும் இருந்தால், f -ஐ A -லிருந்து -B க்கான இருபுறச்சார்பு என்கிறோம்.	
8	**மெய் மதிப்புச் சார்பு**	சார்பு $f: A \to B$ ஆனது **மெய் மதிப்புச் சார்பு** எனில், f-யின் வீச்சகமானது, R எனும் மெய்யெண்களின் உட்கணமாக இருக்கும். அதாவது $f(A) \subseteq R$	

பயிற்சி 1.5

நினைவில் கொள்ள…



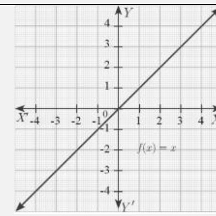
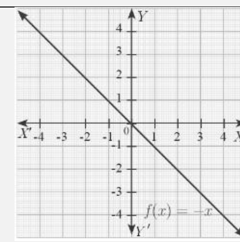
வரையறை::

$f: A \to B$ மற்றும் $g: B \to C$ ஆகியன இரண்டு சார்புகள் எனில் f மற்றும் g ன் சார்புகளின் சேர்ப்பு $g \circ f$ ஐ $g \circ f(x) = g(f(x))$ அனைத்து $x \in A$ என வரையறுக்கலாம்.

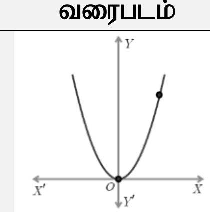
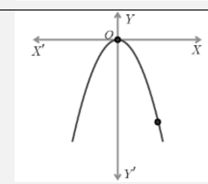
- ✓ பொதுவாக, ஏதேனும் இரு சார்புகள் f மற்றும் g க்கு, $f \circ g \neq g \circ f$ ஆகும்.எனவே சார்புகளின் சேர்ப்பு செயலி பரிமாற்று விதியை பூர்த்தி செய்வதில்லை.

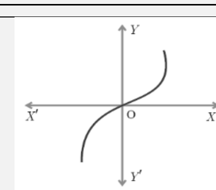
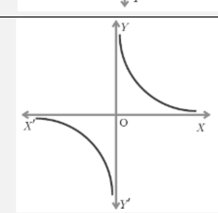
- ✓ மதிப்பகம் g யின் உட்கணமாக, gயின் வீச்சகம் f ஆக இருந்தால் மட்டுமே சார்புகளின் சேர்ப்பு $g \circ f(x)$ இருக்கும்.
- ✓ மூன்று சார்புகளின் சேர்ப்பானது எப்பொழுதும் சேர்ப்பு விதியை பூர்த்தி செய்யும். அதாவது, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.
- ✓ $f: R \to R$ என்ற சார்பானது, $f(x) = mx + c,\quad m \neq 0$ என வரையறுக்கப்பட்டால், அது **நேரிய சார்பாகும்.**

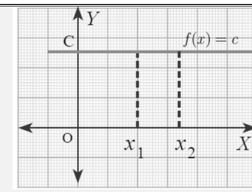
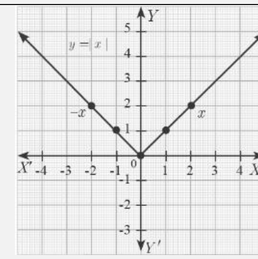
ஒரு சில குறிப்பிட்ட நேரிய சார்புகளும் அதன் வரைபடங்களும் கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

எண்	**சார்பு**	**மதிப்பகம் மற்றும் வரையறை**	**வரைபடம்**
1	சமனிச்சார்பு	$f: R \to R$ ஆனது $f(x) = x$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.	
2	கூட்டல் தலைகீழிச்சார்பு	$f: R \to R$ ஆனது $f(x) = -x$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.	

- ✓ ஒரு சார்பு $f: R \to R, f(x) = ax^2 + bx + c,\ (a \neq 0)$ என வரையறுக்கப்பட்டால், அதை **இருபடிச் சார்பு** என்கிறோம்.

சார்பு, மதிப்பகம், வீச்சகம் மற்றும் வரையறை	**வரைபடம்**
$f: R \to R$ ஆனது $f(x) = x^2, x \in R$, $f(x) \in [0, \infty)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.	
$f: R \to R$ ஆனது $f(x) = -x^2, x \in R$. $f(x) \in (-\infty, 0]$ என வரையறுக்கபடுகிறது.	

ஒரு சார்பு $f: R \to R, f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\quad (a \neq 0)$ என வரையறுக்கப்பட்டால், அதைக் **கனச் சார்பு** அல்லது **முப்படி சார்பு** என அழைக்கிறோம்.	
ஒரு சார்பு $f: R - \{0\} \to R\ , f(x) = \frac{1}{x}$ என வரையறுக்கப்பட்டால், அது **தலைகீழ்ச்சார்பு** எனப்படும்.	

ஒரு சார்பு $f: R \to R$ ஐ $f(x) = c, \forall\, x \in R$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அது **மாறிலிச்சார்பு** எனப்படும்.	
மட்டு அல்லது மிகை மதிப்புச் சார்பு: $f: R \to [0, \infty)$ ஆனது $f(x) = \lvert x \rvert = \begin{cases} x\,; x \geq 0 \\ -x\,; x < 0 \end{cases}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.	

மட்டுச்சார்பானது ஒரு நேரிய சார்பு இல்லை. ஆனால் அது இரு நேரிய சார்புகள் x மற்றும் $-x$ கலந்த கலவையாகும்.